Ορισμός 1

Η κατάσταση $i \in S$ λέγεται απορροφητική αν-ν $p_{ii}^{(1)}=1$

Ορισμός 2

Περίοδος μιας κατάστασης $i \in S$ ονομάζεται ο Μ.Κ.Δ, d_i, όλων των ακεραίων $n \geq 1$ για τους οποίους $p_{ii}^{(n)}>0$

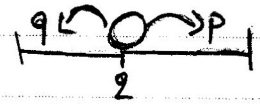
Ορισμός 3

Μια κατάσταση $i \in S$ λέμε ότι είναι απεριοδική αν $d_i=1$ αλλιώς περιοδική

Ορισμός 4

Μια κατάσταση $i \in S$ λέγεται εργοδική αν i είναι θετικώς επ/κή κ απεριοδική

Πχ (ορισμός 2)



$p+q=1$

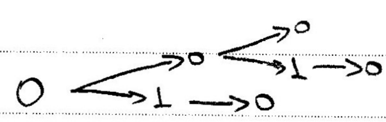
$p_{22}^{(2)}=2\cdot p\cdot q$, $p_{22}^{(3)}=0$, $p_{22}^{(4)}>0$, $p_{22}^{(5)}=0$ κ.ο.κ.

Άρα $d_i=(2,4,6,\dots)=2$

Πχ

$$P=\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

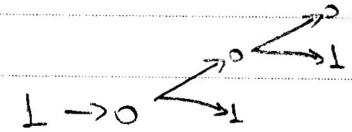
$$P=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$



$p_{00}^{(1)}>0$

$p_{00}^{(2)}>0$

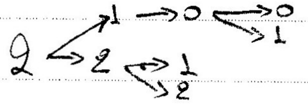
$d_0=1$



$p_{11}^{(2)}>0$

$p_{11}^{(3)}>0$

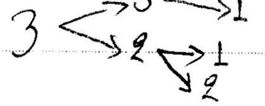
$d_1=1$



$p_{22}^{(1)}>0$

$p_{22}^{(2)}>0$

$d_2=1$



$p_{33}^{(i)}=0 \quad \forall i$

Πρόταση

Αν $P_{ij}(s)=\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^{(n)}$ και $F_{ij}(s)=\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} s^{n}$, $|s|<1$

τότε $F_{ij}(s)=\dfrac{P_{ij}(s)}{1+P_{jj}(s)}$ και $P_{ij}(s)=\dfrac{F_{ij}(s)}{1-F_{jj}(s)}$

Απόδειξη

$p_{ij}^{(1)}=f_{ij}^{(1)}$

$$p_{ij}^{(2)}=P\begin{pmatrix}\text{να πάω από}\\ \text{το } i \text{ στο } j\\ \text{σε 2 βήματα}\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\text{να πάω για 1η φορά στο } j \text{ στο 1ο βήμα}\\ \text{και να παραμείνω} \quad \text{ή}\\ \text{να πάω για 1η φορά στο } j \text{ στο 2ο βήμα}\\ \text{ξεκινώντας από το } i\end{pmatrix}$$

$$=f_{ij}^{(1)}p_{jj}^{(1)}+f_{ij}^{(2)}$$

$$p_{ij}^{(3)}=f_{ij}^{(1)}p_{jj}^{(2)}+f_{ij}^{(2)}p_{jj}^{(1)}+f_{ij}^{(3)}$$

$$p_{ij}^{(4)}=f_{ij}^{(1)}p_{jj}^{(3)}+f_{ij}^{(2)}p_{jj}^{(2)}+f_{ij}^{(3)}p_{jj}^{(1)}+f_{ij}^{(4)}$$

$$P_{ij}(s)=s^1p_{ij}^{(1)}+s^2p_{ij}^{(2)}+s^3p_{ij}^{(3)}+s^4p_{ij}^{(4)}$$
$$=f_{ij}^{(1)}s\left[1+sp_{jj}^{(1)}+s^2p_{jj}^{(2)}+\dots\right]+f_{ij}^{(2)}s^2\left[1+sp_{jj}^{(1)}+s^2p_{jj}^{(2)}+\dots\right]$$
$$+f_{ij}^{(3)}s^3\left[1+sp_{jj}^{(1)}+s^2p_{jj}^{(2)}+\dots\right]+\dots=$$
$$=\left[1+sp_{jj}^{(1)}+s^2p_{jj}^{(2)}+\dots\right]\left[f_{ij}^{(1)}s+f_{ij}^{(2)}s^2+\dots\right]$$

$$P_{ij}^{(s)}=\left[1+P_{jj}^{(s)}\right]F_{ij}^{(s)} \quad (1)$$

Από την (1) για $i=j$ έχω

$$P_{jj}(s)=(1+P_{jj}(s))\cdot F_{jj}(s) \Rightarrow P_{jj}(s)=\frac{F_{jj}(s)}{1-F_{jj}(s)} \Rightarrow$$

$$P_{ij}(s)=\left[1+P_{jj}(s)\right]F_{ij}(s) \Rightarrow$$

$$P_{ij}(s)=\frac{F_{ij}(s)}{1-F_{jj}(s)}$$

Λήμμα Abel για δυναμοσειρές

Έστω $\{C_k\}$ μια ακολουθία μη αρνητικών όρων.

Αν $C(s)=\sum_{k=1}^{\infty} C_k s^k$ συγκλίνει για $|s|<1$ τότε $\lim_{s\to 1} C(s)=\sum_{k=1}^{\infty} C_k$

Θεώρημα

Έστω $j \in S$ μια κατάσταση μιας στατικής Μαρκοβ. Αλυσ.
Ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Η j είναι παροδική αν-ν η $\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)}$ συγκλίνει κ τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)}$ συγκλίνει

(ii) j είναι επαναληπτική αν-ν η $\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)}$ αποκλίνει και τότε αποκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)}$ $\forall i$ για το οποίο $i \to j$

Απόδειξη

i) j παροδική αν-ν $f_{jj}^{*} < 1$ όπου $f_{jj}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = F_{jj}^{(1)}$, δηλαδή $F_{jj}(1) < 1$. Θ.δ.ο. $\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)}$ συγκλίνει

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)} = P_{jj}(1) \overset{i=j}{=\!=} \frac{F_{jj}(1)}{1-F_{jj}(1)} < +\infty$$

Έτσι, $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)} = P_{ij}(1) = \frac{F_{ij}(1)}{1-F_{jj}(1)} < +\infty$

ii) j είναι επαναληπτική αν-ν $f_{jj}^{*} = 1$

$F_{jj}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = f_{jj}^{*} = 1$. Θ.δ.ο. $\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)} = +\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)} = P_{jj}(1) = \frac{F_{jj}(1)}{1-F_{jj}(1)} \overset{\frac{1}{0}}{=\!=} +\infty$$

Επίσης, $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)} = P_{ij}(1) = \frac{F_{ij}(1)}{1-F_{jj}(1)} = +\infty$ αν $F_{ij}(1) \neq 0$

$F_{ij}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = P($ σε κάποια στιγμή του j ξεκινώντας από το $i)$

Πότε $F_{ij}(1) \neq 0$? $i \leftrightarrow j$ άρα $F_{ij}(1) \neq 0$

Παρατήρηση

Από το παραπάνω Θεώρημα προκύπτει από το σκέλος 1 ότι όταν η j είναι παροδική αν-ν συγκλίνει η $\sum P_{jj}^{(n)}$ και τότε συγκλίνει και η $\sum P_{ij}^{(n)}$ $\forall i$. Τότε από ΑΠΕΙ 1 : $\lim_{n\to+\infty} P_{jj}^{(n)} = 0$ και $\lim_{n\to+\infty} P_{ij}^{(n)} = 0$ $\forall i$

Θεώρημα.

Έστω $j \in S$ είναι μια επαναληπτική κ απεριοδική $(d_j = 1)$ και έστω $\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)}$ (ο μέσος χρόνος της επανάλ. της j)

Τότε $\lim_{n\to+\infty} P_{jj}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}$ και $\lim_{n\to+\infty} P_{ij}^{(n)} = \frac{F_{ij}(1)}{\mu_j}$ $\forall i \in S$

Πρόταση

Αν η $i \in S$ είναι επαναληπτική και $i \to j$ τότε $j \to i$

Απόδειξη

$f_{ii}^* = 1$, $i \to j$ σημαίνει ότι $(\exists n \geq 0): p_{ij}^{(n)} > 0$

Θ.δ.ο. $j \to i$ Θ.δ.ο. $(\exists m \geq 0): p_{ji}^{(m)} > 0$. Υπάρχει διότι πηγαίνοντας στην j και όντας η i επαναληπτική, η πιθανότητα να γυρίσω πίσω είναι θετική

Πρόταση

Από επαναληπτικές καταστάσεις μόνο επαναληπτικές καταστάσεις είναι προσιτές

Απόδειξη

Έστω $i \in S$ επαναλ. με $i \to j$. Θ.δ.ο. j είναι επαναλ.

Έχουμε δείξει ότι $j \to i$

Άρα $i \leftrightarrow j$ δηλ. $(\exists n \geq 0): p_{ij}^{(n)} > 0$ και $(\exists m \geq 0): p_{ji}^{(m)} > 0$

Η i είναι επαναλ. αν-ν $\sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)}$ αποκλίνει

Θ.δ.ο. j είναι επαναλ. άρα αρκεί ν.δ.ο. $\sum_{l=1}^{\infty} p_{jj}^{(l)}$ αποκλίνει

$\sum_{l=1}^{\infty} p_{jj}^{(l)} \geq \sum_{l=1}^{\infty} p_{jj}^{(n+l+m)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(n)} \sum p_{ii}^{(l)} = +\infty$

$p_{jj}^{(n+m+l)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(n)} p_{jj}^{(l)}$

Θεώρημα

Σε μία κλάση ισοδυναμίας επικοινωνούντων καταστάσεων όλες οι καταστάσεις είναι του ίδιου τύπου. Δηλ. ή όλες θετικώς επαναλ. ή όλες ασαφώς επαναλ. ή όλες περιοδικές

Επιπλέον, όλες έχουν την ίδια περίοδο

Απόδειξη

i) i παροδική. Αν η j ήταν επαναλ.$^{(j \to i)}$ τότε θα έπρεπε και η i επαναλ. ΑΤΟΠΟ

i) Έστω i επαναλ. και $i \leftrightarrow j$ τότε από προηγ. πρόταση ξέρω ότι j επαναλ.

Έστω επιπλέον i ασαφώς επαναλ. Θ.δ.ο. j ασαφώς επαναλ.

i ασαφώς επαναληπτική σημαίνει ότι $\lim_{n \to +\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$

$i \leftrightarrow j$ άρα $(\exists\, k \geq 0) : P_{ij}^{(k)} > 0$ και $(\exists\, m \geq 0) : P_{ji}^{(m)} > 0$

$P_{ii}^{(m+k+n)} > P_{ij}^{(k)} P_{ji}^{(m)} P_{jj}^{(n)}$

$P_{ii}^{(m+k+n)} \to 0$ και επειδή $P_{ij}^{(k)}, P_{ji}^{(m)} > 0$ άρα $P_{jj}^{(n)} \to 0$

Θεώρημα

Μια μη διαχωρίσιμη μαρκοβιανή αλυσίδα με πεπερ. πλήθος καταστάσεων είναι θετικώς επαναλ.

Απόδειξη

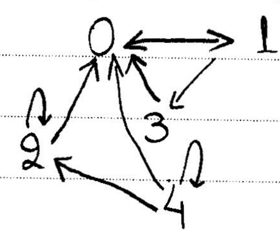
Έστω $j \in S$ ασαφώς επαναλ. ή παροδική. Τότε $\lim P_{ij}^{(n)} = 0$

Έστω k το πλήθος των καταστάσεων άρα

$\lim\left(\sum_{i=1}^{k} P_{ij}^{(n)}\right) = 1$ ΑΤΟΠΟ

Πχ

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$



$2 \to 0$ και $0 \not\to 2$ άρα η Μαρκ. Αλυσίδα είναι διαχωρίσιμη

$0 \to 3$ και $3 \to 0$ γιατί $P_{03}^{(2)} > 0$ και $P_{30}^{(1)} > 0$

Έστω ότι η 2 ήταν επαναληπτική άρα από θεώρ. $0 \not\to 2$

άρα η 2 όχι επαναληπτική, άρα 2 παροδική.

Η 4 είναι παροδική για τον ίδιο λόγο

Οι 0, 1, 3 είναι θετικώς επαναλ.